数理解析研究所講究録
940巻 1996年 83-96

A HAMILTONIAN PATH INTEGRAL FOR A DEGENERATE PARABOLIC PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATOR

東京大学数理科学研究科　　熊ノ郷　直人 (NAOTO KUMANO-GO)

第0節.　序

$m\,(>0)$ 階放物型作用素の基本解を、C.Tsutsumi [10] とは異なった方法で構成する。C.Tsutsumi は、漸近展開を用いて近似解を構成し、その近似解に Levi-Mizohata の方法を適用して、基本解を構成した。それに対して、ここでは、Hamiltonian 経路積分を用いて基本解を構成する。Hamiltonian 経路積分を用いれば、基本解の表象を実際に書くことができる。また、この Hamiltonian 経路積分は $S^{2m}_{\lambda,\rho,\delta}$ の位相で収束し、$S^{0}_{\lambda,\rho,\delta}$ の位相で弱収束する。つまり、$R^{2n}_{x,\xi}$ 上で広義一様収束する。

第1節では、擬微分作用素の基本的な性質を紹介する。これらの性質は第2節で用いる。(詳細は、H.Kumano-go [6] の第7章§1と§2を参照。) 第2節では、$m\,(>0)$ 階放物型作用素の基本解を、Hamiltonian 経路積分を用いて構成する。

第1節.　擬微分作用素

$x=(x_1,\dots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n_x$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in \boldsymbol{R}^n_\xi$ と 多重指標 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ に対して、

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\quad |\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n,\quad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,\quad \beta!=\beta_1!\cdots\beta_n!,$$

$$x\cdot\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n,\quad \langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2},\quad \langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2},$$

$$\partial_{\xi_j}=\frac{\partial}{\partial\xi_j},\quad D_{x_j}=-i\frac{\partial}{\partial x_j},\quad \partial_\xi^\alpha=\partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{\xi_n}^{\alpha_n},\quad D_x^\beta=D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}$$

とする。

1993 Mathematics Subject Classification. Primary 35S10; Secondary 47G05, 58D30,...

$\boldsymbol{R}^n$ 上の Schwartz の急減少関数族を、$\mathcal{S}$ で表す。$\mathcal{S}$ は、セミノルム

$$|u|_{l,\mathcal{S}} \equiv \max_{k+|\alpha|\leq l} \sup_x |\langle x\rangle^k \partial_x^\alpha u(x)| \quad (l=0,1,2,\dots)$$

で、 フレッシュ空間となる。

関数 $a(\eta,y)$ の振動積分を、

$$\mathrm{O_s}\text{—}\iint e^{-iy\cdot\eta}a(\eta,y)dyđ\eta \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\iint e^{-iy\cdot\eta}\chi(\epsilon\eta,\epsilon y)a(\eta,y)dyđ\eta$$

で定義する。ただし、$\chi(\eta,y)\in\mathcal{S}$ で $\chi(0,0)=1$ を満たすとし、$đ\eta\equiv(2\pi)^{-n}d\eta$ とする。(詳細は、 H.Kumano-go [6] の 第1章§6を参照。)

[定義 **1.1**] (尺度関数 $\lambda(\xi)$).

$\boldsymbol{R}_\xi^n$ 上の実数値 C^∞-関数 $\lambda(\xi)$ が尺度関数であるとは、任意の α に対して、ある定数 A_0, $A_\alpha>0$ が存在して、

$$1\leq\lambda(\xi)\leq A_0\langle\xi\rangle\,, \tag{1.1}$$

$$|\partial_\xi^\alpha\lambda(\xi)|\leq A_\alpha\lambda(\xi)^{1-|\alpha|} \tag{1.2}$$

を満たすことをいう。

例.

1° $\lambda(\xi)=\langle\xi\rangle$.

2° $\lambda(\xi)=\left\{1+\sum_{j=1}^n|\xi_j|^{2m_j}\right\}^{1/(2m)}$, $(m_j\in\mathbb{N},\ \ m\equiv\max_{1\leq j\leq n}\{m_j\})$.

[定義 **1.2**] (擬微分作用素).

$m\in\boldsymbol{R}$, $0\leq\delta\leq\rho\leq 1$, $\delta<1$ とする。

$\boldsymbol{R}_{x,\xi}^{2n}$ 上の C^∞-関数 $p(x,\xi)$ が $\boldsymbol{S}_{\lambda,\rho,\delta}^m$-クラスの表象であるとは、任意の α,β に対して、ある定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在して、

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)|\leq C_{\alpha,\beta}\lambda(\xi)^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}\,, \tag{1.3}$$

を満たすことをいう。ただし、$p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\equiv\partial_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)$ とする。

表象 $p(x,\xi)$ をもつ擬微分作用素 $p(X,D_x)$ を、

$$p(X,D_x)u(x) \equiv \iint e^{i(x-x')\cdot\xi} p(x,\xi)u(x')dx'đ\xi \quad (u \in \mathcal{S}) \tag{1.4}$$

で定義する。ただし、 $đ\xi \equiv (2\pi)^{-n}d\xi$ とする。

(注意).

1° 記号を簡明にするため、$p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi) \equiv \partial_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)$, $p^{(\alpha)}(x,\xi) \equiv \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)$, $p_{(\beta)}(x,\xi) \equiv D_x^\beta p(x,\xi)$ とする。

2° 表象のクラス $\boldsymbol{S}^m_{\lambda,\rho,\delta}$ は、セミノルム

$$|p|_l^{(m)} \equiv \max_{|\alpha+\beta|\le l} \sup_{(x,\xi)} \{|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\lambda(\xi)^{-(m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|)}\} \quad (l=0,1,2,\dots) \tag{1.5}$$

で、フレッシュ空間となる。

3° $p(X,D_x) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ の連続性は明かである。さらに、 $p(X,D_x) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ は、

$$(p(X,D_x)u,v) \equiv (u, p(X,D_x)^*v) \quad \text{for} \quad u \in \mathcal{S}', v \in \mathcal{S} \tag{1.6}$$

により、 $p(X,D_x) : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ に拡張できる。

[定理 **1.3**] (多重積).

M は正の定数とし、実数列 $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ は

$$\sum_{j=1}^\infty |m_j| \le M < \infty. \tag{1.7}$$

を満たすとする。

このとき、任意の $\nu = 1,2,\dots$ と $p_j(x,\xi) \in \boldsymbol{S}^{m_j}_{\lambda,\rho,\delta} (j=1,2,\dots,\nu+1)$ に対して、ある $q_{\nu+1}(x,\xi) \in \boldsymbol{S}^{\bar{m}_{\nu+1}}_{\lambda,\rho,\delta} (\bar{m}_{\nu+1} \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_{\nu+1})$ が存在し、

$$q_{\nu+1}(X,D_x) = p_1(X,D_x)p_2(X,D_x)\cdots p_{\nu+1}(X,D_x) \tag{1.8}$$

を満たす。

さらに、任意の非負整数 l に対して、ある定数 A_l と非負整数 l' が存在し、

$$|q_{\nu+1}|_l^{(\bar{m}_{\nu+1})} \le (A_l)^\nu \prod_{j=1}^{\nu+1} |p_j|_{l'}^{(m_j)} \tag{1.9}$$

を満たす。ここで、 定数 A_l と 非負整数 l' は、正の定数 M と非負整数 l によって決まるが、ν にはよらない。

(証明). H.Kumano-go [6] の第7章§2の定理2.4を参照。 □

[定理 **1.4**].

$p_j(x,\xi) \in \boldsymbol{S}^{m_j}_{\lambda,\rho,\delta}(j=1,2)$ とし、 $q_\theta(x,\xi)$ $(|\theta| \le 1)$ を、

$$q_\theta(x,\xi) \equiv \mathrm{O_s}\text{—}\iint e^{-iy\cdot\eta} p_1(x,\xi+\theta\eta)p_2(x+y,\xi)dy\bar{d}\eta \tag{1.10}$$

で定義する。

このとき、 $\{q_\theta(x,\xi)\}_{|\theta|\le 1}$ は $\boldsymbol{S}^{m_1+m_2}_{\lambda,\rho,\delta}$ の有界集合となる。

さらに、任意の非負整数 l に対して、θ によらない、ある定数 A_l と非負整数 l' が存在し、

$$|q_\theta|_l^{(m_1+m_2)} \le A_l |p_1|_{l'}^{(m_1)} |p_2|_{l'}^{(m_2)} \quad (\,|\theta| \le 1\,) \tag{1.11}$$

を満たす。

(証明). H.Kumano-go [6] の第２章§２の補題２．４または第７章§２の補題２．２を参照。

□

第２節.　主定理

[定理 **2.1**] (主定理).

$K(t;x,\xi) \in \mathcal{C}^0([0,T];\boldsymbol{S}^m_{\lambda,\rho,\delta})$ ($m>0$, $0 \le \delta < \rho \le 1$) は、次の条件 (a1),(a2) を満たすとする。:

(a1) ある定数 $c>0$ と $m'(0 \le m' \le m)$ が存在し、

$$Re\,K(t;x,\xi) \le -c\lambda(\xi)^{m'} \;\; on\; [0,T]\times \boldsymbol{R}^{2n}_{x,\xi}\,. \tag{2.1}$$

を満たす。

(a2) 任意の α,β に対して、ある定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在し、

$$|K^{(\alpha)}_{(\beta)}(t;x,\xi)/Re\,K(t;x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\lambda(\xi)^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \;\; on\; [0,T]\times \boldsymbol{R}^{2n}_{x,\xi} \tag{2.2}$$

を満たす。

このとき、次の (1) − (5) が成立する。:

(1) $\Delta_{t,s} : (T \geq) t \equiv t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} \equiv s (\geq 0)$ を区間 $[s,t]$ の任意の分割とし、作用素 $e^{(t_j - t_{j+1})K(t_{j+1})}(X, D_x)$ を、

$$e^{(t_j - t_{j+1})K(t_{j+1})}(X, D_x)u(x) \equiv \iint e^{i(x-x')\cdot\xi} e^{(t_j - t_{j+1})K(t_{j+1}; x, \xi)} u(x')dx' đ\xi \tag{2.3}$$

で定義する。

このとき、ある $p(\Delta_{t,s}; x, \xi) \in \boldsymbol{S}^0_{\lambda,\rho,\delta}$ が存在し、

$$\begin{aligned} p(\Delta_{t,s}; X, D_x) =& e^{(t-t_1)K(t_1)}(X, D_x) e^{(t_1-t_2)K(t_2)}(X, D_x) \\ & \cdots e^{(t_\nu - s)K(s)}(X, D_x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

が成立する。

(2) 任意の非負整数 l に対して、ある定数 C_l, C'_l と非負整数 l' が存在し、

$$|p(\Delta_{t,s})|^{(0)}_l \leq C_l \,, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} & |p(\Delta_{t,s}) - p(\Delta'_{t,s})|^{(2m)}_l \\ & \leq C'_l (t-s) \Big(|\Delta_{t,s}| + \sup_{|t'-t''| \leq |\Delta_{t,s}|} |K(t') - K(t'')|^{(m)}_{l'} \Big) . \end{aligned} \tag{2.6}$$

が成立する。ここで、$\Delta_{t,s} : (T \geq) t \equiv t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} \equiv s (\geq 0)$ は区間 $[s,t]$ の任意の分割であり、 $\Delta'_{t,s}$ は分割 $\Delta_{t,s}$ の任意の細分である。また、$|\Delta_{t,s}|$ は分割の幅 $|\Delta_{t,s}| \equiv \max_{0 \leq j \leq \nu} |t_j - t_{j+1}|$ とする。特に、定数 C_l, C'_l と非負整数 l' は、 ν や $\Delta_{t,s}$ や $\Delta'_{t,s}$ にはよらない。

(3) ある $p^\star(t, s; x, \xi) \in \boldsymbol{S}^0_{\lambda,\rho,\delta}$ が存在し、分割の幅 $|\Delta_{t,s}| \longrightarrow 0$ のとき、$p(\Delta_{t,s}; x, \xi)$ ($\in \boldsymbol{S}^0_{\lambda,\rho,\delta}$) は、$p^\star(t, s; x, \xi)$ ($\in \boldsymbol{S}^0_{\lambda,\rho,\delta}$) に $\boldsymbol{S}^{2m}_{\lambda,\rho,\delta}$ の位相で収束する。さらに、 $p(\Delta_{t,s}; x, \xi)$ は次のように書ける：

$$\begin{aligned} p^\star(t, s; x, \xi) =& \lim_{|\Delta_{t,s}| \to 0} \mathrm{O_s}\text{—} \iint \cdots \iint e^{-i\sum_{j=1}^{\nu} y^j \cdot \eta^j} \\ & \times \exp\Big(\sum_{j=0}^{\nu} (t_j - t_{j+1}) K(t_{j+1}; x + \bar{y}^j, \xi + \eta^{j+1}) \Big) dy^1 đ\eta^1 \cdots dy^\nu đ\eta^\nu . \end{aligned} \tag{2.7}$$

ただし、$\bar{y}^0 \equiv 0$, $\bar{y}^j \equiv y^1 + y^2 + \cdots + y^j$, $\eta^{\nu+1} \equiv 0$ とし、収束は、$\boldsymbol{R}^{2n}_{x,\xi}$ 上の広義一様収束である。

(4) $u \in \boldsymbol{L}^2$ に対して、擬微分作用素 $U(t,s) \equiv p^\star(t,s;X,D_x)$ は次の関係を満たす。:

$$\begin{aligned}
&U(t,s)u(x)\\
&= \lim_{|\Delta_{t,s}|\to 0} e^{(t-t_1)K(t_1)}(X,D_x)e^{(t_1-t_2)K(t_2)}(X,D_x)\cdots e^{(t_\nu-s)K(s)}(X,D_x)u(x)\\
&= \lim_{|\Delta_{t,s}|\to 0} \iint\cdots\iint \exp\left(\sum_{j=0}^{\nu} i(x^j - x^{j+1})\cdot\xi^{j+1} + (t_j - t_{j+1})K(t_{j+1};x^j,\xi^{j+1})\right)\\
&\qquad\qquad \times u(x^{\nu+1})dx^{\nu+1}đ\xi^{\nu+1}\cdots dx^1 đ\xi^1\,, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

ただし、 $x^0 \equiv x$ とし、収束は、$\boldsymbol{L}^2$-収束である。

(5) $U(t,s) \equiv p^\star(t,s;X,D_x)$ は、 m 階放物型作用素 $L \equiv \partial_t - K(t,X,D_x)$ に対する基本解となり、

$$\begin{cases} LU(t,s) = 0 & \text{on } (s,T] \\ U(s,s) = I & (0 \le s \le T) \end{cases} \qquad (2.9)$$

を満たす。

(注意).

1° 条件 $(a1)$,$(a2)$ は、ある定数 M に対し $|\xi| \ge M$ を満たす任意の ξ で成立すれば、十分である。実際、この場合、十分大きな $R > 0$ が存在して、表象 $K_R(t;x,\xi) \equiv K(t;x,\xi) - R$ は、任意の ξ に対して $(a1)$,$(a2)$ を満たす。 $U_R(t,s)$ を $L_R \equiv \partial_t - K_R(t;X,D_x)$ の基本解とすれば、 $U(t,s) \equiv e^{(t-s)R}U_R(t,s)$ は L の基本解となる。

2° $(t_j - t_{j+1})K(t_{j+1};\cdot,\cdot)$ を $\int_{t_{j+1}}^{t_j} K(\tau;\cdot,\cdot)d\tau$ で置き換えてもよい。この場合、(2.6) は

$$|p(\Delta_{t,s}) - p(\Delta'_{t,s})|_l^{(2m)} \le C'_l(t-s)|\Delta_{t,s}|\,, \qquad (2.6')$$

で置き換えることができる。

3°

$$L \equiv \partial_t + a(t)|x|^{2l}(-\,\triangle)^m + (-\,\triangle)^{m'} \quad (0 \le a(t) \in \mathcal{C}[0,T]\,,\, m - m' < l)\,.$$

を考える。$\rho = 1$, $\delta = (m-m')/l$, $m \to 2m$, $m' \to 2m'$ とおけば、
表象 $a(t)|x|^{2l}|\xi|^{2m} + |\xi|^{2m'}$ は、条件 $(a1)$ と $(a2)$ を満たす。それゆえ、これらの条件は通常の放物型作用素だけでなく、ある種の退化放物型作用素でも満たされる。

定理 2.1 を証明する前に、いくつかの補題を用意する。

まず、$T \geq t \geq s \geq 0$ に対して、$p(t,s;x,\xi)$ を、

$$p(t,s;x,\xi) \equiv \exp\Big((t-s)K(s,x,\xi)\Big) \tag{2.10}$$

で、定義しておく。

次の補題は、漸近展開公式の一般化であり、この論文で本質的な役割を果たす。特に、以下あらわれるすべての定数が、ν や $\varDelta_{t_0,t_{\nu+1}}$ によらないということが重要である。

[補題 **2.2**].

$\nu = 1, 2, \ldots$、$\varDelta_{t_0,t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ とし、N_0 は $(\rho - \delta)N_0 \geq 2m$ を満たす自然数とする。

$q(\varDelta_{t_0,t_1};x,\xi)$, $q(\varDelta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)$ と $r(\varDelta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)$ を

$$q(\varDelta_{t_0,t_1};x,\xi) \equiv p(t_0,t_1;x,\xi), \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} q(\varDelta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) \equiv & \sum_{|\alpha^1|+|\alpha^2|+\cdots+|\alpha^\nu|<N_0} \frac{1}{\alpha^1!\alpha^2!\cdots\alpha^\nu!} \\ & \times p_{(\alpha^\nu)}(t_\nu,t_{\nu+1};x,\xi)\partial_\xi^{\alpha^\nu}\Big(p_{(\alpha_{\nu-1})}(t_{\nu-1},t_\nu;x,\xi)\partial_\xi^{\alpha^{\nu-1}}\Big(\\ & \cdots p_{(\alpha^2)}(t_2,t_3;x,\xi)\partial_\xi^{\alpha^2}\Big(p_{(\alpha^1)}(t_1,t_2;x,\xi)\partial_\xi^{\alpha^1}\Big(p(t_0,t_1;x,\xi)\Big)\Big)\cdots\Big)\Big), \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} r(\varDelta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) \equiv & \sum_{|\alpha^1|+|\alpha^2|+\cdots+|\alpha^\nu|=N_0,\,|\alpha^\nu|\neq 0} \frac{|\alpha^\nu|}{\alpha^1!\alpha^2!\cdots\alpha^\nu!} \\ & \times \int_0^1 (1-\theta)^{|\alpha^\nu|-1} \mathrm{O_s}\!-\!\iint e^{-iy\cdot\eta} p_{(\alpha^\nu)}(t_\nu,t_{\nu+1};x+y,\xi) \\ & \times \partial_\xi^{\alpha^\nu}\Big(p_{(\alpha_{\nu-1})}(t_{\nu-1},t_\nu;x,\xi+\theta\eta)\partial_\xi^{\alpha^{\nu-1}}\Big(\cdots p_{(\alpha^2)}(t_2,t_3;x,\xi+\theta\eta) \\ & \times \partial_\xi^{\alpha^2}\Big(p_{(\alpha^1)}(t_1,t_2;x,\xi+\theta\eta)\partial_\xi^{\alpha^1}\Big(p(t_0,t_1;x,\xi+\theta\eta)\Big)\Big)\cdots\Big)\Big)dy\,đ\eta\, d\theta \end{aligned} \tag{2.13}$$

で定義する。

このとき、

$$\begin{aligned} & q(\varDelta_{t_0,t_\nu};X,D_x)p(t_\nu,t_{\nu+1};X,D_x) \\ & = q(\varDelta_{t_0,t_{\nu+1}};X,D_x) + r(\varDelta_{t_0,t_{\nu+1}};X,D_x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

が成立する。

さらに、任意の非負整数 l に対して、ある定数 $C_{1,l}, C_{2,l}, C_{3,l}$ が存在し、任意の $\nu = 1, 2, \ldots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$|q(\Delta_{t_0, t_\nu})|_l^{(0)} \leq C_{1,l}\,, \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} &|q(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}) - p(t_0, t_{\nu+1})|_l^{(2m)} \\ &\leq C_{2,l}(t_0 - t_{\nu+1}) \Big((t_0 - t_{\nu+1}) + \sup_{t_0 \geq t' \geq t'' \geq t_{\nu+1}} |K(t') - K(t'')|_l^{(m)} \Big)\,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$|r(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}})|_l^{(0)} \leq C_{3,l}(t_0 - t_\nu)(t_\nu - t_{\nu+1}) \tag{2.17}$$

が成立する。

(証明).

1° $T \geq t \geq s \geq 0$ に対して、

$$\eta(t, s; x, \xi) \equiv -(t - s) \mathrm{Re}\, K(s; x, \xi)\, (\geq 0) \tag{2.18}$$

とおく。さらに、$\nu = 1, 2, \ldots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$d(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \equiv \prod_{j=0}^{\nu-1} p(t_j, t_{j+1}; x, \xi)\,, \tag{2.19}$$

$$\eta(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \equiv \sum_{j=0}^{\nu-1} \eta(t_j, t_{j+1}; x, \xi) \tag{2.20}$$

とおく。明らかに、

$$|d(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi)| = \exp\Big(-\eta(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \Big) \tag{2.21}$$

である。

2° α, β に対して、$d_{\alpha,\beta}(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi)$ を

$$d_{(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \equiv d_{\alpha,\beta}(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) d(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \tag{2.22}$$

で定義する。このとき、

任意の $\alpha,\beta\ (|\alpha+\beta|\geq 1)$ と α',β' に対して、ある定数 $C_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}$ が存在し、
任意の $\nu=1,2,\ldots$ と $\Delta_{t_0,t_{\nu+1}}:(T\geq)t_0\geq t_1\geq\cdots\geq t_\nu\geq t_{\nu+1}(\geq 0)$ に対して、

$$|d_{\alpha,\beta}{}^{(\alpha')}_{(\beta')}(\Delta_{t_0,t_\nu};x,\xi)|\leq C_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}\eta(\Delta_{t_0,t_\nu};x,\xi)\Big(\eta(\Delta_{t_0,t_\nu};x,\xi)+1\Big)^{|\alpha+\beta|-1}\\ \times\lambda(\xi)^{\delta|\beta+\beta'|-\rho|\alpha+\alpha'|} \tag{2.23}$$

が成立する。
3° $\widetilde{\alpha}^\nu\equiv(\alpha^1,\ldots,\alpha^\nu)$ を $\boldsymbol{R}^{\nu n}$ の多重指標とする。$f_{\widetilde{\alpha}^\nu}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)$ を

$$\begin{aligned}&f_{\widetilde{\alpha}^\nu}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)d(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)\\ &\equiv p_{(\alpha^\nu)}(t_\nu,t_{\nu+1};x,\xi)\partial_\xi^{\alpha^\nu}\Big(p_{(\alpha_{\nu-1})}(t_{\nu-1},t_\nu;x,\xi)\partial_\xi^{\alpha^{\nu-1}}\Big(\\ &\cdots p_{(\alpha^2)}(t_2,t_3;x,\xi)\partial_\xi^{\alpha^2}\Big(p_{(\alpha^1)}(t_1,t_2;x,\xi)\partial_\xi^{\alpha^1}\Big(p(t_0,t_1;x,\xi)\Big)\Big)\cdots\Big)\Big)\end{aligned} \tag{2.24}$$

で定義する。このとき、
任意の $N=1,2,\ldots$ と α,β に対して、ある定数 $C_{N,\alpha,\beta}$ が存在し、
任意の $\nu=1,2,\ldots$ と $\Delta_{t_0,t_{\nu+1}}:(T\geq)t_0\geq t_1\geq\cdots\geq t_\nu\geq t_{\nu+1}(\geq 0)$ に対して、

$$|f_{\widetilde{\alpha}^\nu}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)|\leq C_{N,\alpha,\beta}\Big(\prod_{k=1}^{J}\eta(t_{j_k},t_{j_k+1};x,\xi)\Big)\eta(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)\\ \times\Big(\eta(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)+1\Big)^{2(N-1)}\lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \tag{2.25}$$

が成立する。ただし、

$$1\leq j_1<j_2<\cdots<j_J\leq\nu,\quad |\alpha^{j_k}|\neq 0\,(k=1,2,\ldots,J),$$

$$\sum_{j=1}^{\nu}|\alpha^j|=\sum_{k=1}^{J}|\alpha^{j_k}|=N$$

とする。
4° $N=1,2,\ldots$ に対して、$g_N(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)$ を、

$$g_N(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)\equiv\sum_{|\alpha^1|+|\alpha^2|+\cdots+|\alpha^\nu|=N}\frac{1}{\alpha^1!\alpha^2!\cdots\alpha^\nu!}f_{\widetilde{\alpha}^\nu}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) \tag{2.26}$$

で定義すると、(2.25) より

$$
\begin{aligned}
&|g_{N(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)| \\
&\leq \sum_{J=1}^{N} \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_J\leq\nu} \sum_{\sum_{k=1}^{J}|\alpha^{j_k}|=N,\,|\alpha^{j_k}|\neq 0} \frac{1}{\alpha^{j_1}!\alpha^{j_2}!\cdots\alpha^{j_J}!} \\
&\quad\times C_{N,\alpha,\beta}\Big(\prod_{k=1}^{J}\eta(t_{j_k},t_{j_k+1};x,\xi)\Big)\eta(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) \\
&\quad\times\Big(\eta(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)+1\Big)^{2(N-1)}\lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \\
&\leq (nN)^N C_{N,\alpha,\beta}\eta(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)\Big(\eta(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)+1\Big)^{2(N-1)}\lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \\
&\quad\times\left(\sum_{J=1}^{N}\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_J\leq\nu}\prod_{k=1}^{J}\eta(t_{j_k},t_{j_k+1};x,\xi)\right)
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

となる。よって、

任意の $N=1,2,\ldots$ と α,β に対して、ある定数 $C'_{N,\alpha,\beta}$ が存在し、

任意の $\nu=1,2,\ldots$ と $\Delta_{t_0,t_{\nu+1}}:(T\geq)t_0\geq t_1\geq\cdots\geq t_\nu\geq t_{\nu+1}(\geq 0)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
|g_{N(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)| &\leq C'_{N,\alpha,\beta}\Big(\eta(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)\Big)^2 \\
&\quad\times\Big(\eta(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)+1\Big)^{3(N-1)}\lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

が成立する。

5°

$$
h_N(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)\equiv g_N(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)d(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) \tag{2.29}
$$

とおく。ここで、

$$
\sup_{\eta>0}\eta^k e^{-\eta}<\infty \quad (k=0,1,2,\ldots) \tag{2.30}
$$

に注意すると、(2.21), (2.23) と (2.28) より、

任意の $N=1,2,\ldots$ と α,β に対して、

ある定数 $C'_{\alpha,\beta}$, $C''_{\alpha,\beta}$, $C''_{N,\alpha,\beta}$, $C'''_{N,\alpha,\beta}$, $C''''_{N,\alpha,\beta}$ が存在して、

任意の $\nu=1,2,\ldots$ と $\Delta_{t_0,t_{\nu+1}}:(T\geq)t_0\geq t_1\geq\cdots\geq t_\nu\geq t_{\nu+1}(\geq 0)$ に対して、

$$
|d_{(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0,t_\nu};x,\xi)|\leq\begin{cases} C'_{\alpha,\beta}\lambda(\xi)^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \\ C''_{\alpha,\beta}(t_0-t_\nu)\lambda(\xi)^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \quad (|\alpha+\beta|\geq 1), \end{cases} \tag{2.31}
$$

$$|h_{N}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi)| \le \begin{cases} C''_{N,\alpha,\beta}\lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \\ C'''_{N,\alpha,\beta}(t_0-t_{\nu+1})\lambda(\xi)^{m-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \\ C''''_{N,\alpha,\beta}(t_0-t_{\nu+1})^2\lambda(\xi)^{2m-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \end{cases} \tag{2.32}$$

が成立する。

6° さて、

$$q(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) = d(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) + \sum_{N=1}^{N_0-1} h_N(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi), \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} & d(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) - p(t_0,t_{\nu+1};x,\xi) \\ &= \sum_{j=0}^{\nu}(t_j-t_{j+1})\Big(K(t_{j+1},x,\xi) - K(t_{\nu+1},x,\xi)\Big) \\ &\times \int_0^1 \exp\left(\theta\sum_{j=0}^{\nu}(t_j-t_{j+1})K(t_{j+1},x,\xi)\right)\exp\Big((1-\theta)(t_0-t_{\nu+1})K(t_{\nu+1},x,\xi)\Big)d\theta \end{aligned} \tag{2.34}$$

に注意すると、(2.31) と (2.32) より、(2.15) と (2.16) を得る。さらに、

$$\begin{aligned} r(\Delta_{t_0,t_{\nu+2}};x,\xi) = & \sum_{0<|\alpha^{\nu+1}|<N_0} \frac{|\alpha^{\nu+1}|}{\alpha^{\nu+1}!}\int_0^1 (1-\theta)^{|\alpha^{\nu+1}|-1} \\ & \times \mathrm{O_s}\!-\!\iint e^{-iy\cdot\eta} h_{N_0-|\alpha^{\nu+1}|}{}^{(\alpha^{\nu+1})}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi+\theta\eta) \\ & \times d_{(\alpha^{\nu+1})}(\Delta_{t_{\nu+1},t_{\nu+2}};x+y,\xi)dy\,đ\eta\, d\theta \\ & + \sum_{|\alpha^{\nu+1}|=N_0} \frac{|\alpha^{\nu+1}|}{\alpha^{\nu+1}!}\int_0^1 (1-\theta)^{|\alpha^{\nu+1}|-1} \\ & \times \mathrm{O_s}\!-\!\iint e^{-iy\cdot\eta} d^{(\alpha^{\nu+1})}(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi+\theta\eta) \\ & \times d_{(\alpha^{\nu+1})}(\Delta_{t_{\nu+1},t_{\nu+2}};x+y,\xi)dy\,đ\eta\, d\theta \end{aligned} \tag{2.35}$$

に注意すると、(2.31), (2.32) と 定理 1.4 より, (2.17) を得る。

7° 帰納法より、 (2.14) を得る。 □

次の補題のアイデアは、 Fujiwara [3] による。

[補題 **2.3**] (**Fujiwara's skip**).

$\Upsilon(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};x,\xi) \in S^0_{\lambda,\rho,\delta}$ を、

$$\begin{aligned} & p(t_0,t_1;X,D_x)p(t_1,t_2;X,D_x)\cdots p(t_\nu,t_{\nu+1};X,D_x) \\ & \equiv q(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};X,D_x) + \Upsilon(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};X,D_x) \end{aligned} \tag{2.36}$$

で定義する。

このとき、次が成立する。

$$\Upsilon(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}};X,D_x)=\sum{}' r(\Delta_{t_0,t_{j_1+1}};X,D_x)r(\Delta_{t_{j_1+1},t_{j_2+1}};X,D_x) \cdots r(\Delta_{t_{j_{J-1}+1},t_{j_J+1}};X,D_x)q(\Delta_{t_{j_J+1},t_{\nu+1}};X,D_x)\,. \tag{2.37}$$

ただし、$\sum{}'$ は、

$$0<j_1<j_1+1<j_2<j_2+1<\cdots<j_{J-1}<j_{J-1}+1<j_J\le\nu \tag{2.38}$$

を満たす整数列 $(j_1,j_2,\ldots,j_J)$ についての和を意味し、
$j_J=\nu$ の場合は、$q(\Delta_{t_{j_J+1},t_{\nu+1}};X,D_x)\equiv I$ とする。

さらに、任意の非負整数 l に対して、ある定数 $C_{4,l}$ が存在し、
任意の $\nu=1,2,\ldots$ と $\Delta_{t_0,t_{\nu+1}}:(T\ge)t_0\ge t_1\ge\cdots\ge t_\nu\ge t_{\nu+1}(\ge 0)$ に対して、

$$|\Upsilon(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}})|_l^{(0)}\le C_{4,l}(t_0-t_{\nu+1})^2 \tag{2.39}$$

が成立する。

(証明). (2.14) を帰納的に用いて、(2.37) を得る。さて、A_l, l' を定理 1.3 と同じ定数、$C_{1,l}, C_{3,l}$ を 補題 2.2 と同じ定数とする。(2.15), (2.17) と定理 1.3 より、

$$\begin{aligned}
|\Upsilon(\Delta_{t_0,t_{\nu+1}})|_l^{(0)} &\le \sum{}'(A_l)^J|r(\Delta_{t_0,t_{j_1+1}})|_{l'}^{(0)}|r(\Delta_{t_{j_1+1},t_{j_2+1}})|_{l'}^{(0)} \\
&\quad \cdots|r(\Delta_{t_{j_{J-1}+1},t_{j_J+1}})|_{l'}^{(0)}|q(\Delta_{t_{j_J+1},t_{\nu+1}})|_{l'}^{(0)} \\
&\le \sum{}'(A_l)^J\Big(\prod_{k=1}^{J}C_{3,l'}(t_0-t_{\nu+1})(t_{j_k}-t_{j_k+1})\Big)C_{1,l'} \\
&\le C_{1,l'}\left(\prod_{j=0}^{\nu}\Big(1+A_lC_{3,l'}(t_0-t_{\nu+1})(t_j-t_{j+1})\Big)-1\right) \\
&\le C_{4,l}(t_0-t_{\nu+1})^2
\end{aligned} \tag{2.40}$$

を得る。 □

最後に、定理 2.1 を証明する。

(定理 2.1 の証明).

1° $p(\Delta_{t,s};x,\xi)$ を、

$$p(\Delta_{t,s};x,\xi) \equiv q(\Delta_{t,s};x,\xi) + \Upsilon(\Delta_{t,s};x,\xi) \tag{2.41}$$

で定義すると、(1) は明らかである。

2° (2.14) と (2.39) より、(2.5) を得る。次に、

$$\begin{aligned} &p(\Delta'_{t_j,t_{j+1}};x,\xi) - p(t_j,t_{j+1};x,\xi) \\ &= \Big(q(\Delta'_{t_j,t_{j+1}};x,\xi) - p(t_j,t_{j+1};x,\xi)\Big) + \Upsilon(\Delta'_{t_j,t_{j+1}};x,\xi) \end{aligned} \tag{2.42}$$

に注意すると、(2.16) と (2.39) より、

任意の非負整数 l に対して、ある定数 $C_{5,l}$ が存在して、

$$\begin{aligned} &|p(t_j,t_{j+1}) - p(\Delta'_{t_j,t_{j+1}})|_l^{(2m)} \\ &\le C_{5,l}(t_j - t_{j+1})\Big((t_j - t_{j+1}) + \sup_{t_j \ge t' \ge t'' \ge t_{j+1}} |K(t') - K(t'')|_l^{(m)}\Big) \end{aligned} \tag{2.43}$$

が成立する。さて、

$$\begin{aligned} &p(\Delta_{t,s};X,D_x) - p(\Delta'_{t,s};X,D_x) = \sum_{j=0}^{\nu} p(\Delta'_{t_0,t_j};X,D_x) \\ &\circ \Big(p(t_j,t_{j+1};X,D_x) - p(\Delta'_{t_j,t_{j+1}};X,D_x)\Big) \circ p(\Delta_{t_{j+1},t_{\nu+1}};X,D_x) \end{aligned} \tag{2.44}$$

と書けるので、(2.5), (2.43) と定理 1.3 より、(2.6) を得る。

3° (2.6) と (2.5) より、ある $p^\star(t,s;x,\xi) \in \boldsymbol{S}^0_{\lambda,\rho,\delta}$ が存在して、

$$|p^\star(t,s)|_l^{(0)} \le C_l\,, \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned} &|p(\Delta_{t,s}) - p^\star(t,s)|_l^{(2m)} \\ &\le C'_l(t-s)\Big(|\Delta_{t,s}| + \sup_{|t'-t''| \le |\Delta_{t,s}|} |K(t') - K(t'')|_{l'}^{(m)}\Big) \end{aligned} \tag{2.46}$$

を満たす。よって、(3) を得る。

4° (3) の結果より、(4) を得る。H.Kumano-go [6] の第 3 章§ 7 を参照。

5° (2) と (3) の結果より、(5) を得る。 □

REFERENCES

[1] R.P.Feynman, *Space-time approach to non relativistic quantum mechanics*, Rev. of Modern Phys. **20** (1948), 367–387.

[2] D.Fujiwara, *A remark on Taniguchi-Kumano-go theorem for product of Fourier integral operators*, Pseudo-differential operators, Proc. Oberwolfach 1986, Lecture notes in Math, Springer **1256** (1987), 135-153.

[3] ———, *The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension*, Nagoya Math. J. **124** (1991), 61–97.

[4] ———, *Some Feynman Path Integrals As Oscillatory Integrals Over A Sobolev Manifold*, preprint (1993).

[5] H.Kitada and H.Kumano-go, *A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equation*, Osaka J. Math. **18** (1981), 291–360.

[6] H.Kumano-go, *Pseudo-Differential Operator*, MIT press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1983.

[7] H.Kumano-go and K.Taniguchi, *Fourier integral operators of multi-phase and the fundamental solution for a hyperbolic system*, Funkcial. Ekvac. **22** (1979), 161–196.

[8] K.Shinkai, *The symbol calculus for the fundamental solution of a degenerate parabolic system with applications*, Osaka J. Math. **14** (1977), 55-84.

[9] K.Taniguchi, *Multi-products of Fourier integral operators and the fundamental solution for a hyperbolic system with involutive characteristics*, Osaka J. Math. **21** (1984), 169–224.

[10] C.Tsutsumi, *The fundamental solution for a degenerate parabolic pseudo-differential operator*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 11–15.

NAOTO KUMANO-GO; DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 7-3-1, HONGO, BUNKYO-KU, TOKYO 113 JAPAN